PF1 — Principes de Fonctionnement des machines binaires

Jean-Baptiste.Yunes@univ-paris-diderot.fr

Version 1.13

Faire des opérations

Savez-vous faire des additions en base b ?

Des soustractions ?

Des multiplications ?

Rappelons-nous que pour cela il nous faut des tables

les tables d’addition

les tables de multiplication

Table d’addition en base 16 :

+	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	10
2	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	10	11
3	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	10	11	12
4	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	10	11	12	13
5	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	10	11	12	13	14
6	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	10	11	12	13	14	15
7	7	8	9	A	B	C	D	E	F	10	11	12	13	14	15	16
8	8	9	A	B	C	D	E	F	10	11	12	13	14	15	16	17
9	9	A	B	C	D	E	F	10	11	12	13	14	15	16	17	18
A	A	B	C	D	E	F	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
B	B	C	D	E	F	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1A
C	C	D	E	F	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1A	1B
D	D	E	F	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1A	1B	1C
E	E	F	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1A	1B	1C	1D
F	F	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1A	1B	1C	1D	1E

Table de multiplication en base 16 :

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F
2	0	2	4	6	8	A	C	E	10	12	14	16	18	1A	1C	1E
3	0	3	6	9	C	F	12	15	18	1B	1E	21	24	27	2A	2D
4	0	4	8	C	10	14	18	1C	20	24	28	2C	30	34	38	3C
5	0	5	A	F	14	19	1E	23	28	2D	32	37	3C	41	46	4B
6	0	6	C	12	18	1E	24	2A	30	36	3C	42	48	4E	54	5A
7	0	7	E	15	1C	23	2A	31	38	3F	46	4D	54	5B	62	69
8	0	8	10	18	20	28	30	38	40	48	50	58	60	68	70	78
9	0	9	12	1B	24	2D	36	3F	48	51	5A	63	6C	75	7E	87
A	0	A	14	1E	28	32	3C	46	50	5A	64	6E	78	82	8C	96
B	0	B	16	21	2C	37	42	4D	58	63	6E	79	84	8F	9A	A5
C	0	C	18	24	30	3C	48	54	60	6C	78	84	90	9C	A8	B4
D	0	D	1A	27	34	41	4E	5B	68	75	82	8F	9C	A9	B6	C3
E	0	E	1C	2A	38	46	54	62	70	7E	8C	9A	A8	B6	C4	D2
F	0	F	1E	2D	3C	4B	5A	69	78	87	96	A5	B4	C3	D2	E1

Tentons une addition

```
retenues
      11
    18A4
+     7C
--------
    1920
```

+	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	10
2	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	10	11
3	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	10	11	12
4	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	10	11	12	13
5	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	10	11	12	13	14
6	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	10	11	12	13	14	15
7	7	8	9	A	B	C	D	E	F	10	11	12	13	14	15	16
8	8	9	A	B	C	D	E	F	10	11	12	13	14	15	16	17
9	9	A	B	C	D	E	F	10	11	12	13	14	15	16	17	18
A	A	B	C	D	E	F	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
B	B	C	D	E	F	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1A
C	C	D	E	F	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1A	1B
D	D	E	F	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1A	1B	1C
E	E	F	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1A	1B	1C	1D
F	F	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1A	1B	1C	1D	1E

retenues

```
  18A4
-  7C
   1
------
  1828
```

+	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	10
2	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	10	11
3	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	10	11	12
4	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	10	11	12	13
5	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	10	11	12	13	14
6	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	10	11	12	13	14	15
7	7	8	9	A	B	C	D	E	F	10	11	12	13	14	15	16
8	8	9	A	B	C	D	E	F	10	11	12	13	14	15	16	17
9	9	A	B	C	D	E	F	10	11	12	13	14	15	16	17	18
A	A	B	C	D	E	F	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
B	B	C	D	E	F	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1A
C	C	D	E	F	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1A	1B
D	D	E	F	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1A	1B	1C
E	E	F	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1A	1B	1C	1D
F	F	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1A	1B	1C	1D	1E

Tentons une soustraction

```
      18A4
X       7C
----------
     127B0
+    AC7C•
----------
     BEF70
```

Tentons une multiplication

+	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	10
2	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	10	11
3	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	10	11	12
4	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	10	11	12	13
5	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	10	11	12	13	14
6	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	10	11	12	13	14	15
7	7	8	9	A	B	C	D	E	F	10	11	12	13	14	15	16
																17
																18
																19
																1A
																1B
																1C
																1D
																1E

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F
2	0	2	4	6	8	A	C	E	10	12	14	16	18	1A	1C	1E
3	0	3	6	9	C	F	12	15	18	1B	1E	21	24	27	2A	2D
4	0	4	8	C	10	14	18	1C	20	24	28	2C	30	34	38	3C
5	0	5	A	F	14	19	1E	23	28	2D	32	37	3C	41	46	4B
6	0	6	C	12	18	1E	24	2A	30	36	3C	42	48	4E	54	5A
7	0	7	E	15	1C	23	2A	31	38	3F	46	4D	54	5B	62	69
8	0	8	10	18	20	28	30	38	40	48	50	58	60	68	70	78
9	0	9	12	1B	24	2D	36	3F	48	51	5A	63	6C	75	7E	87
A	0	A	14	1E	28	32	3C	46	50	5A	64	6E	78	82	8C	96
B	0	B	16	21	2C	37	42	4D	58	63	6E	79	84	8F	9A	A5
C	0	C	18	24	30	3C	48	54	60	6C	78	84	90	9C	A8	B4
D	0	D	1A	27	34	41	4E	5B	68	75	82	8F	9C	A9	B6	C3
E	0	E	1C	2A	38	46	54	62	70	7E	8C	9A	A8	B6	C4	D2
F	0	F	1E	2D	3C	4B	5A	69	78	87	96	A5	B4	C3	D2	E1

En base 2 c’est facile

+	0	1
0	0	1
1	1	10

x	0	1
0	0	0
1	0	1

En base 2 c'est facile

Addition

+	0	1
0	0	0
1	0	1

retenue

+	0	1
0	0	1
1	1	0

résultat

Multiplication
pas de retenue!

x	0	1
0	0	0
1	0	1

résultat

retenues

```
    0000100111100
    1010100110111
+       110101100
  ---------------
    1011011100011
```

+	**0**	**1**
0	0	1
1	1	10

Tentons une addition

retenues

```
  1010100110111
-     110101100
   111   1
  -------------
  1001110001011
```

+	0	1
0	0	1
1	1	10

Tentons une soustraction

Tentons une multiplication

+	0	1
0	0	1
1	1	10

```
            1010100110111
x                   11010
-------------------------
            0000000000000
+          1010100110111•
+         0000000000000••
+        1010100110111•••
+       1010100110111••••
-------------------------
       100010011110010110
```

x	0	1
0	0	0
1	0	1

Outils…

l’outil `bc`

une calculatrice

un langage de programmation pour calculer…

La « preuve par 9 »

Connaissez-vous la preuve par 9 ?

c’est un moyen de vérification de la validité d’une opération arithmétique

Attention, si la « preuve par 9 » ne fonctionne pas l’opération est fausse, mais si la « preuve par 9 » fonctionne l’opération est **peut-être** vraie

Comment ça marche ?

il suffit de vérifier que modulo 9 l'opération fonctionne…il suffit de vérifier qu'avec les restes de la division par 9, ça fonctionne

1345*2345 = 3154025 ?

c'est **peut-être correct** car

$(1+3+4+5)*(2+3+4+5) \equiv (3+1+5+4+0+2+5) \pmod 9$

$13*14 \equiv 20 \pmod 9$

$(1+3)*(1+4) \equiv (2+0) \pmod 9$

$4*5 \equiv 2 \pmod 9$

$20 \equiv 2 \pmod 9$

$(2+0) \equiv 2 \pmod 9$

ça ressemble à quelque chose de correct…

La preuve par 9 fonctionne sur l'addition, la soustraction, la division, etc

- pour aller plus vite on peut ignorer les chiffres 9…

On peut généraliser à la preuve par b-1 en base b…

On peut aussi faire une preuve par 99 en base 100

- ça réduit la probabilité des faux positifs…

Critère de divisibilité

On en connaît quelques exemples

divisibilité par 2

l'écriture du nombre doit terminer par 0, 2, 4, 6, ou 8

divisibilité par 3

la somme des chiffres du nombre doit être divisible par 3 (on réitère si nécessaire) pour la divisibilité par 2 c'est trivial puisque si n s'écrit $a_{n-1}a_{n-2}\ldots a_1a_{0,}$ $n=(a_{n-1}a_{n-2}\ldots a_1)x10+a_0$

10 est divisible par 2, donc n divisible par 2 ssi a_0 l'est

pour la divisibilité par 3

on remarque que $10^p \equiv 1 \pmod 3$

10=9+1, 100=99+1, 1000=999+1, etc

on sait aussi que si $n \equiv m \pmod p$ et $n' \equiv m' \pmod p$ alors $a+b \equiv m+m' \pmod p$, idem pour la différence et le produit

par conséquent n est divisible par 3 (congru à 0 modulo 3), $n \equiv a_{n-1}+a_{n-2}+\ldots+a_1+a_0 \pmod 3$ donc si $a_{n-1}+a_{n-2}+\ldots+a_1+a_0$ est divisible par 3

Il existe une méthode générale pour trouver un critère de divisibilité par p (entier quelconque)

regardons simplement pour 7 (par exemple)

$20 \equiv 6 \pmod 7$ et $20 = 10\text{x}2$

$n=(a_{n-1}a_{n-2}\ldots a_1)\text{x}10+a_0 \equiv 0 \pmod 7$

ssi $2n=(a_{n-1}a_{n-2}\ldots a_1)\text{x}20+2a_0 \equiv 0 \pmod 7$

donc ssi $6\text{x}(a_{n-1}a_{n-2}\ldots a_1)+2a_0 \equiv 0 \pmod 7$

777
6*77+2*7
476
6*47+2*6
294
6*29+2*4
182
6*18+2*2
112
6*11+2*2
70

778
6*77+2*8
478
6*47+2*8
298
6*29+2*8
190
6*19+2*0
114
6*11+2*4
74

plus intéressant (toujours pour 7)

$50 \equiv 1 \pmod 7$ et $50 = 10 \times 5$

$n=(a_{n-1}a_{n-2}\ldots a_1)\times 10+a_0 \equiv 0 \pmod 7$

ssi $5n=(a_{n-1}a_{n-2}\ldots a_1)\times 50+5a_0 \equiv 0 \pmod 7$

donc ssi $(a_{n-1}a_{n-2}\ldots a_1)+5a_0 \equiv 0 \pmod 7$

777
77+5*7
112
11+5*2
21

778
77+5*8
117
11+5*7
46

Critère de divisibilité par 11

$10 \times 10 = 100 \equiv 1 \pmod{11}$

9636
96+36
132
1+32
33

mais aussi

$10 \equiv -1 \pmod{11}$

donc $-1 \times (a_{n-1}a_{n-2}\ldots a_1)+a_0 \equiv 0 \pmod{11}$

$(a_{n-1}a_{n-2}\ldots a_1)-a_0 \equiv 0 \pmod{11}$

9636
963−6
957
95−7
88

mais encore

$10 \equiv -1 \pmod{11}$, $100 \equiv 1 \pmod{11}$, $1000 \equiv -1 \pmod{11}$, etc

$\ldots+1000a_3+100a_2+10a_1+a0 \equiv 0 \pmod{11}$

ssi $\ldots-a3+a2-a1+a0 \equiv 0 \pmod{11}$

9636
6+6−9−3
0

Vous voulez jouer avec le critère de divisibilité ?

essayez de vérifier si 5316123 est divisible par 111 ?

remarquez simplement que

$1000 \equiv 1 \pmod{111}$, c'est-à-dire que $1000=9\times111+1$

Q: critère de divisibilité en base 7, nombre divisible par 7 ?

Q: critère de divisibilité en base 12, nombre divisible par 6 ? par 2 ? par 3 ? par 4 ?

Les nombres qui ne sont pas des entiers…

Comment les représenter ?

Les **fractions**

c’est simple, il s’agit de simples couples d’entiers, donc pas de problèmes particuliers ?

si ce n’est les opérations arithmétiques qui nécessitent des attentions particulières… (même dénominateur…)

Les **décimaux**

Attention les fractions ne sont pas des décimaux, les décimaux sont des fractions dont le dénominateur est une puissance de 10

- pour la partie entière pas de problème : comme avant
- pour la partie décimale il faut utiliser le processus symétrique
  - on va multiplier par deux, garder la partie entière, puis recommencer jusqu'à épuisement

$$0{,}296875 \times 2 = 0{,}593750$$
$$0{,}59375 \times 2 = 1{,}18750$$
$$0{,}1875 \times 2 = 0{,}3750$$
$$0{,}375 \times 2 = 0{,}750$$
$$0{,}75 \times 2 = 1{,}50$$
$$0{,}50 \times 2 = 1{,}0$$

$$0{,}296875 = (0{,}010011)_2$$

Attention : ceci ne termine pas à tous les coups…

$0{,}1 \leadsto 0{,}2 \leadsto 0{,}4 \leadsto 0{,}8 \leadsto 1{,}6 \leadsto 1{,}2 \leadsto 0{,}4 \leadsto 0{,}8\ldots$

$0{,}1 = (0{,}0001100110011 0011\ldots0011\ldots)_2$

on représente la répétition infinie de manière plus **symbolique** à l'aide du symbole ω et parfois * :

0,1 s'écrit $0{,}0(0011)^{\omega}$ ou $0{,}0(0011)^{*}$ en base 2

L'écriture de 0,1 en base 10 est finie, mais infinie périodique en base 2…

1/7

périodique en base 10

fini en base 7

La **notation scientifique**

consiste à écrire les nombres sous la forme :

$$\pm a.10^n$$

où $a \in [1;10[$ et $n \in \mathbf{Z}$

65,345 s’écrit $6,5345.10^1$

0,045 s’écrit $4,5.10^{-2}$

c’est donc encore une affaire de couple…

La **notation en virgule flottante**

que l'on utilisera plus loin est une variante de la notation scientifique

x s'y écrit $\pm m.10^{n}$

où $m \in [0,1;1[$ et $n \in \mathbf{Z}$, m est appelé la **mantisse** et n **l'exposant**

ainsi 65,345 s'écrit $0,65345.10^{2}$

et 0,045 s'écrit $0,45.10^{-1}$

on peut donc les représenter sous la forme d'un couple (m,n) : (65345,2) et (45,-1) par exemple…

Attention 0 a pour mantisse 0, l'exposant est non significatif…

Jouons avec les écritures…

Infinité de chiffres à gauche ?

On sait qu'on peut mettre autant de zéro qu'on veut à gauche d'une écriture, même une infinité (si on accepte l'existence d'un tel infini) ok…

Jouons un peu : quel est le nombre qui ajouté à 1 fait 0 ?

Tout le monde sait qu'il s'agit du nombre habituellement noté -1

Mais en utilisant l'addition/soustraction standard ? (on opère en base 10)

```
              1
+             ?
 ______________
              0
```

```
     …000000001
+    …999999999
 ______________
     …000000000
```

On sait qu’on peut mettre autant de zéro qu’on veut à gauche d’une écriture, même une infinité (si on accepte l’existence d’un tel infini) ok…

Jouons un peu : quel est le nombre qui ajouté à 2 fait 0 ?

Tout le monde sait qu’il s’agit du nombre noté -2

Mais en utilisant l'addition/soustraction standard ?

$$\begin{array}{lr} & 2 \\ + & ? \\ \hline & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{lr} & \ldots 000000002 \\ + & \ldots 999999998 \\ \hline & \ldots 000000000 \end{array}$$

donc (en base 10)

- une infinité de 0 à gauche : nombre positif
  - cette infinité de 0 est généralement ignorée mais parfois symbolisée par le signe +
- une infinité de 9 à gauche : nombre négatif (il faudrait mieux préciser mais peut importe ici)
  - cette infinité est habituellement notée à l'aide du signe - précédant la valeur absolue

En base 2 ?

$$\begin{array}{lr} & 101 \\ + & ? \\ \hline & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{lr} & \ldots 0000101 \\ + & \ldots 1111011 \\ \hline & \ldots 0000000 \end{array}$$

$$(\ldots 1111011)_2 = (-3)_{10}$$

En base 3 ? 5 ?

Et les nombres qui ne sont pas des entiers ?

Et bien leur écriture pose des problèmes, par exemple les réels :

$$x=0,9999999\ldots ?$$

$$10x-x = 9,999999\ldots - 0,999999\ldots = 9$$

donc

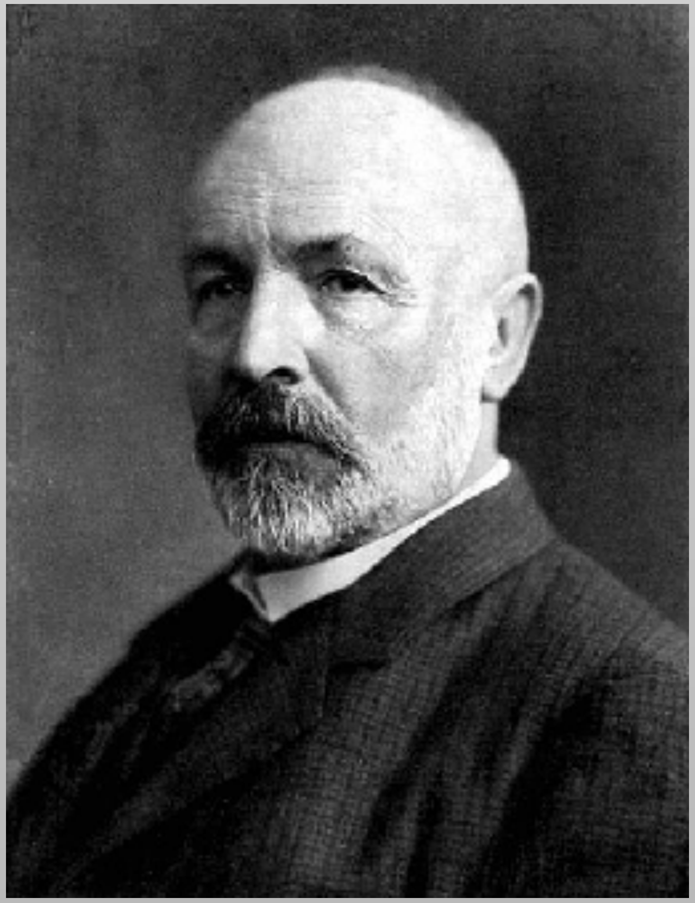
$$x = 1$$

pas d'écriture positionnelle unique des réels (quelle que soit la base)

On sait que les réels sont non dénombrables…

Une démonstration est due à

Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor
1845 — 1918



source : Wikipédia

La **diagonale de Cantor**

On énumère (tentative) les nombres réels de l'intervalle [0,1[

`0,3256738…`

`0,9087687…`

`0,9875623…`

`0,1111111…`

On construit le nombre `0,4182…` et l'on constate qu'il n'est pas dans la liste. Cela fonctionne avec n'importe quelle liste (il y a toujours un nombre qui ne peut être représenté)

Et si on tente avec les **inverses** ?

$$
\begin{array}{r}
\ldots 0000101 \\
\times \quad \ldots ? \\
\hline
\ldots 0000001
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r}
\ldots 0000101 \\
\times \quad \ldots 0011001101 \\
\hline
101 \\
{}^{1}000 \\
{}^{1}101 \\
{}^{1}101 \\
{}^{1}000 \\
{}^{1}000 \\
{}^{1}101 \\
{}^{1}101 \\
{}^{1}000 \\
000 \\
\ldots \\
\hline
\ldots 0000001
\end{array}
$$