Preuves par récurrence

1. Montrer que $(x+y)^r = \sum_{k=0}^{r} \binom{r}{k} x^k y^{r-k}$.
   Remarque : $\binom{r+1}{k} = \binom{r}{k} + \binom{r}{k-1}$.
2. En quoi la preuve suivante est-elle fausse ?
   Théorème : Soit $a > 0$, $\forall n > 0$, $a^{n-1} = 1$.
   Preuve :
   Cas de base : Si $n = 1$, $a^{1-1} = a^0 = 1$.
   Hypothèse de récurrence : $\forall n \in [1, n_0]$, $a^{n-1} = 1$
   Récurrence : Pour $n+1$ on a :
   $$a^{(n+1)-1} = a^n = \frac{a^{n-1}.a^{n-1}}{a^{n-2}} = \frac{1.1}{1} = 1$$
   donc vrai quel que soit n.
3. Quel est le nombre maximal (L_n) de régions définies par n lignes dans le plan.
4. Soient n personnes en cercle (1 à n). On *enlève* une personne sur deux jusqu'à ce qu'il n'en reste plus qu'une. Quel est le numéro de la dernière personne restante ?
5. En quoi la preuve du théorème suivant est-elle fausse ?
   Théorème : Toutes les voitures sont de la même couleur.
   Preuve :
   Cas de base : Si $n = 1$, alors chaque voiture étant de la même couleur qu'elle même, c'est vrai.
   Hypothèse de récurrence : $\forall n \in [1, n_0]$, n voitures prises au hasard sont toutes de la même couleur.
   Récurrence : Prenons $n+1$ voitures. On peut remarquer que les voitures numérotées (on les numérote soigneusement) de 1 à n sont de la même couleur (hypothèse de récurrence). Mais les voitures numérotées de 2 à $n+1$ sont aussi toutes de la même couleur (par hypothèse de récurrence). Ainsi les voitures 1 et $n+1$ sont de la même couleur car les voitures de numéro 2 à n n'ont pas été repeintes... Donc le théorème est vrai pour tout n.
6. Une armoire contient n tiroirs. Nous avons $n+1$ objets à ranger dans l'armoire. Montrer qu'au moins un tiroir contient deux éléments. (Théorème du *pigeon hole*).